TD d'Algorithmique Avancée pour l'Intelligence Artificielle et les Graphes

Exercice 1 : Considérons un réseau social dans lequel les membres peuvent choisir d'être amis (si a est ami de b, alors b est nécessairement ami de a). Nous souhaitons montrer qu'il existe au moins deux membres du réseau qui ont le même nombre d'amis, et qu'il existe un nombre pair de membres ayant un nombre impair d'amis.

1. Définissez un graphe et reformulez ces deux propriétés par rapport à ce graphe.
2. Démontrez les deux propriétés.

Exercice 2 : Un groupe de neuf scouts partent camper dans la montagne. Ils communiquent en morse, avec leurs lampes de poche, mais les configurations du terrain font que :
- Arthur ne peut communiquer qu'avec Babar et Donald ;
- Babar ne peut communiquer qu'avec Arthur et Fernand ;
- Céleste ne peut communiquer qu'avec Fernand ;
- Donald ne peut communiquer qu'avec Arthur et Gontran ;
- Ernestine ne peut communiquer qu'avec Fernand, Gontran et Isidore ;
- Fernand ne peut communiquer qu'avec Babar, Céleste, Ernestine et Isidore ;
- Gontran ne peut communiquer qu'avec Donald, Ernestine et Hugo ;
- Hugo ne peut communiquer qu'avec Gontran et Isidore ;
- Isidore ne peut communiquer qu'avec Ernestine, Fernand et Hugo.

Afin d'être certains que tout le monde soit bien informé, ils ont convenu que tout scout recevant un message pour la première fois le retransmet instantanément à son tour. Arthur veut envoyer le message "Toujours prêt" à ses camarades. En supposant que l'envoi du message en morse prend une minute à chaque fois, Arthur souhaite savoir combien de temps il faudra pour que tout le monde ait reçu son message, et qui seront les derniers informés.

1. Définissez un graphe, et reformulez le problème en le ramenant à un problème vu en cours.
2. Quel algorithme permet de résoudre ce problème ? Résolvez-le en détaillant les étapes de la résolution.

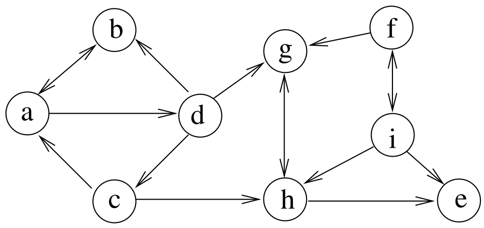
Exercice 3 : Le savant Cosinus souhaite ordonner ses vêtements de telle sorte qu'il puisse les enfiler du premier au dernier, sachant que
- le caleçon (k) doit être enfilé avant le pantalon (p) et les chaussures (c),
- les chaussettes (t) doivent être enfilées avant les chaussures (c),
- le pantalon (p) doit être enfilé avant de mettre la ceinture (u) et les chaussures (c),
- la chemise (h) doit être enfilée avant de mettre la cravate (r) et la ceinture (u),
- la cravate (r) et la ceinture (u) doivent être mises avant d'enfiler la veste (v),
- la montre (m) peut être mise à tout moment.

1. Définissez un graphe, et reformulez le problème en le ramenant à un problème vu en cours.
2. Quel algorithme permet de résoudre ce problème ?
3. Résolvez le problème en détaillant les étapes de la résolution.

Exercice 4 : L'algorithme de Kosaraju décrit ci-dessous permet de rechercher les composantes fortement connexes (CFC) d'un graphe orienté.

1 **Fonction** *Kosaraju*(g)
  Entrée : Un graphe orienté $g = (S, A)$
  Postcondition : Retourne l'ensemble des composantes fortement connexes de g
2 $CFC \leftarrow \emptyset$
3 $num \leftarrow$ DFSnum(g)
4 Construire le graphe $g^t = (S, A^t)$ tel que $A^t = \{(s_i, s_j) \mid (s_j, s_i) \in A\}$
5 Colorier tous les sommets de g^t en blanc
6 **pour** *chaque sommet* s_i *pris par ordre de* num *décroissant* **faire**
7   **si** s_i *est blanc* **alors**
8     $B \leftarrow \{s_j \in S | s_j$ est blanc$\}$
9   DFSrec(g^t, s_i)
10   Ajouter à CFC l'ensemble $\{s_j \in B | s_j$ est noir$\}$
11 **retourne** CFC

Exécutez cet algorithme sur le graphe ci-dessous en détaillant les étapes de la résolution.



Pour nous convaincre de la correction de cet algorithme, nous introduisons le graphe des composantes fortement connexes $g^{cfc} = (S^{cfc}, A^{cfc})$ tel que

- S^{cfc} est une partition de S telle que chaque sommet de S^{cfc} contient tous les sommets de S appartenant à une CFC différente;
- les arcs de g^{cfc} traduisent l'existence de chemins entre les sommets des CFC :

$$A^{cfc} = \{(cfc_i, cfc_j) \in S^{cfc} \times S^{cfc} \mid \exists \text{ un chemin } \langle s_1, \ldots, s_k \rangle \text{ tel que } s_1 \in cfc_i, s_k \in cfc_j\}$$

Ce graphe peut-il avoir des circuits?
Dessinez g^{cfc} pour le graphe précédent.
Montrez qu'après l'exécution de la ligne 3 de l'algorithme, pour tout arc $(cfc_i, cfc_j) \in A^{cfc}$, la plus grande valeur de num de l'ensemble des sommets de cfc_i est supérieure à la plus grande valeur de num de l'ensemble des sommets de cfc_j. Autrement dit,

$$max\{num[s_i] \mid s_i \in cfc_i\} > max\{num[s_j] \mid s_j \in cfc_j\}$$

En déduire des propriétés sur les couleurs des sommets au moment de l'appel à DFSrec(g^t, s_i) (ligne 9 de l'algorithme) :

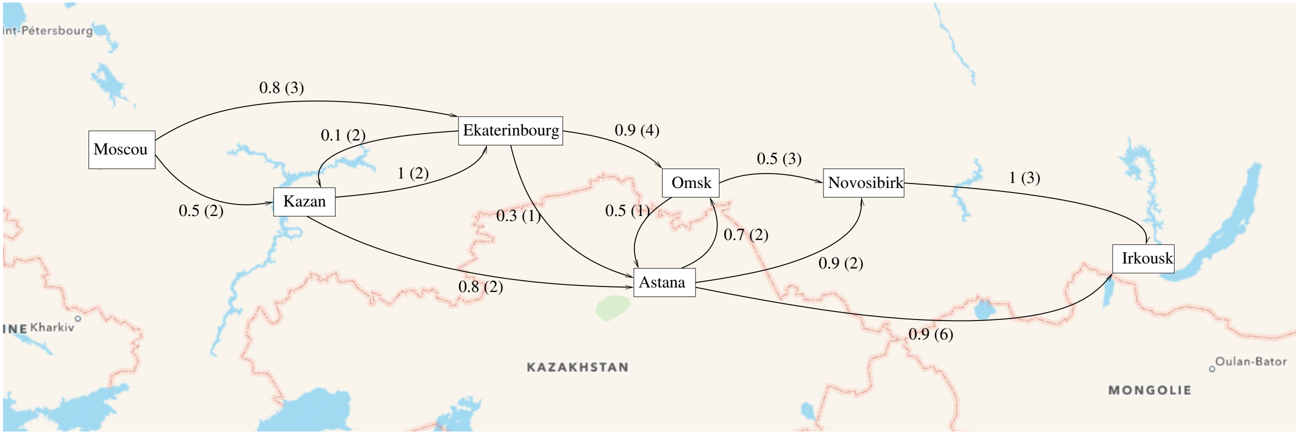
- Peut-il y avoir des sommets gris?
- Que peut-on dire des sommets noirs?
- Que peut-on dire des sommets blancs?

En déduire que l'algorithme est correct.

Exercice 5 : Partant de Moscou, Michel Strogoff, courrier du Tsar, devait rejoindre Irkoutsk. Avant de partir, il avait consulté une voyante qui lui avait dit entre autres choses :

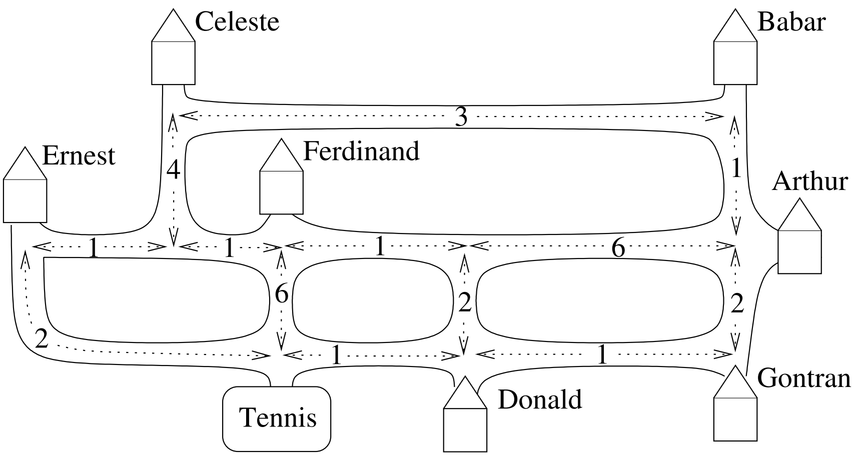
> *"Après Kazan, méfiez-vous du ciel, à Omsk, attention aux tartares, dans Ekaterinbourg, attention aux yeux, après Astana, méfiez-vous de l'eau, et surtout prenez garde partout à un grand brun avec des bottes noires..."*

A partir de ces informations, Michel Strogoff avait estimé, pour chaque liaison entre deux villes, sa probabilité de réussite ainsi que le temps nécessaire, en jours (chiffre entre parenthèses) :



1. Quel algorithme peut-il utiliser pour trouver le chemin le plus sûr allant de Moscou à Irkoutsk ? Quelles adaptations faut-il apporter à cet algorithme ? Déterminez un itinéraire optimal en détaillant les étapes de la résolution.
2. Michel Strogoff se rendit alors compte qu'il pouvait y avoir plusieurs chemins, allant de Moscou à Irkoutsk, qui maximisent sa probabilité de réussite. Il décida alors de choisir, parmi les différents chemins les plus sûrs, le plus rapide. Quel algorithme peut-il utiliser pour cela ? Quelles adaptations faut-il apporter à cet algorithme ? Déterminez un itinéraire optimal en détaillant les étapes de la résolution.

Exercice 6 : Arthur a 6 camarades (Babar, Céleste, Donald, Ernest, Ferdinand et Gontran) avec qui il va jouer au tennis. Quand il va jouer au tennis avec un de ces 6 camarades, il passe le prendre chez lui, et fait ensuite la route jusqu'au terrain de tennis avec lui. Il souhaiterait optimiser ses temps de parcours et a établi pour cela un plan du quartier, avec pour chaque tronçon de route le temps estimé (en minutes) pour parcourir le tronçon, en tenant compte des attentes aux feux et autres aléas de la circulation.



Pour chacun de ses 6 camarades, il vous demande quel est l'itinéraire le plus rapide pour aller de chez lui jusqu'au terrain de tennis, en passant par chez son camarade.

1. Définissez un graphe, et reformulez le problème en le ramenant à un problème vu en cours.
2. Quel algorithme vu en cours permet de résoudre ce problème ? Comment l'adapter pour minimiser le nombre de calculs à faire ?
3. Résolvez le problème en détaillant le déroulement de l'algorithme.

Exercice 7 : Aujourd'hui Jon a décidé de cuisiner de vraies lasagnes, en préparant chaque ingrédient lui même. Comme Liz vient diner il compte bien sortir une bonne bouteille de Chianti pour accompagner le repas. Il a donc beaucoup de choses à faire :

— (a) préparer la sauce béchamel, ce qui prend 15 minutes ;
— (b) préparer les feuilles de pâte, ce qui prend 30 minutes ;
— (c) laisser reposer les feuilles de pâte une heure ;
— (d) préparer le coulis de tomates, ce qui prend 45 minutes ;
— (e) éplucher et couper les oignons, ce qui prend 10 minutes ;
— (f) faire griller les oignons (épluchés), ce qui prend 10 minutes ;
— (g) ajouter la viande dans les oignons grillés, et faire encore revenir 15 minutes ;
— (h) éplucher et émincer un brin de céleri et deux carottes, ce qui prend 10 minutes ;
— (i) ajouter les carottes, le céleri, la viande et les oignons dans le coulis de tomates, et laisser mijoter le tout 45 minutes ;
— (j) disposer la béchamel et la sauce entre les feuilles de pâte, ce qui prend 10 minutes ;
— (k) mettre le four à préchauffer pendant 10 minutes ;
— (l) enfourner les lasagnes et laisser cuire pendant 30 minutes.

Jon doit par ailleurs (m) sortir le vin de la cave, pour qu'il se réchauffe doucement pendant une heure, puis (n) ouvrir la bouteille et la laisser encore reposer une heure.

Comme Jon est extrêmement multi-tâches et que de toutes façons presque toutes les durées sont du temps d'attente, il considère que le nombre de tâches qu'il peut faire en même temps est illimité. En revanche, il n'est pas un champion de logistique, et fait donc appel à vous pour déterminer l'heure h (au plus tard) où il devra commencer à préparer le repas, sachant que Liz arrive à 20h00. Il vous demande également de déterminer, pour chaque tâche i, son heure h_i de début de réalisation au plus tôt s'il se met au travail à l'heure h.

1. Définissez un graphe, et reformulez le problème en le ramenant à un problème vu en cours.
2. Quel algorithme permet de résoudre ce problème ? Comment adapter cet algorithme à votre problème ? Résolvez le problème en détaillant les étapes de la résolution.

Sachant que Jon aimerait pouvoir commencer certaines tâches plus tard, tout en assurant que le repas sera prêt à 20h00, il vous demande de déterminer, pour chaque tâche i, son heure de début H_i de réalisation au plus tard.

1. Définissez un graphe, et reformulez le problème en le ramenant à un problème vu en cours.
2. Quel algorithme permet de résoudre ce problème ? Comment adapter cet algorithme à votre problème ? Résolvez le problème en détaillant les étapes de la résolution.

Enfin, Jon vous demande de calculer la marge dont il dispose pour chaque tâche i, en retranchant son heure au plus tôt (h_i) de son heure au plus tard (H_i), et d'identifier les tâches critiques (c'est-à-dire, les tâches dont la marge est nulle).

1. Montrez qu'il existe nécessairement au moins une tâche critique.
2. Montrez qu'une tâche critique doit nécessairement se trouver sur un chemin allant du début du projet à la fin du projet et ne passant que par des tâches critiques. A quoi correspond ce chemin dans le graphe ?